Exercice 1 [20 minutes]

On pose :

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Corrigé

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$$

1. $\boldsymbol{\mathcal{D}_f}$

Il faut que le dénominateur x^2+1 de $f(x)$ soit non nul.

On a :

$$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ (impossible)}$$

Le dénominateur de $f(x)$ ne s'annule jamais donc $\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}$.

2. $\boldsymbol{f'(x)}$

La fonction f, quotient de deux fonctions polynômes est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(x^2+1)-2x(x^2+4x+4)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+2x+4x^2+4-2x^3-8x^2-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}}$$

3. Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ et sens de variation de $\boldsymbol{f}$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $-4x^2-6x+4$, qui est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-4$, $b=-6$ et $c=4$, de discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4(-4)(4) = 36+64 = 100$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6-\sqrt{100}}{2(-4)} = \frac{6-10}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+6+\sqrt{100}}{2(-4)} = \frac{6+10}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Règle : ax^2+bx+c est signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre ses racines.

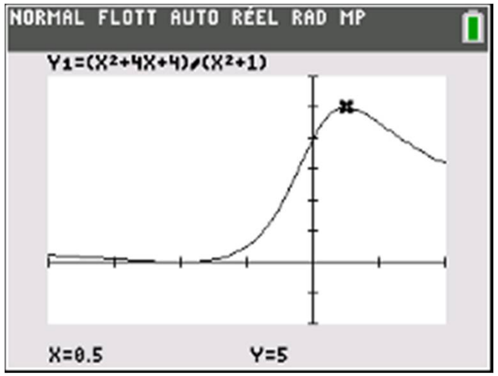
On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de f		↘	0	↗	5	↘	

$$f(-2) = \frac{(-2)^2+4(-2)+4}{(-2)^2+1} = \frac{4-8+4}{4+1} = \frac{0}{5} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)+4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{\frac{1}{4}+2+4}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{1}{4}+6}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{25}{4}\times\frac{4}{5}$$

$$= \frac{25}{5} = 5$$



Exercice 2 [25 minutes]

On pose :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Corrigé

1. $\boldsymbol{\mathcal{D}_f}$

Il faut que le dénominateur $x^2 + 1$ de $f(x)$ soit non nul.

On a :

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

$f(x)$ existe lorsque $x \neq \sqrt{3}$ et $x \neq -\sqrt{3}$ donc $\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R} - \left\{-\boldsymbol{\sqrt{3}}\ ;\ \boldsymbol{\sqrt{3}}\right\}$.

2. $\boldsymbol{f'(x)}$

La fonction f, quotient de deux fonctions polynômes, est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1(x^2-3) - 2x(x+2)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3 - 2x^2 - 4x}{(x^2-3)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x^2-3)^2}}$$

3. Signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ et sens de variation de $\boldsymbol{f}$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $-x^2 - 4x - 3$, qui est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = -4$ et $c = -3$, de discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{4-2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{4+2}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre ses racines ».

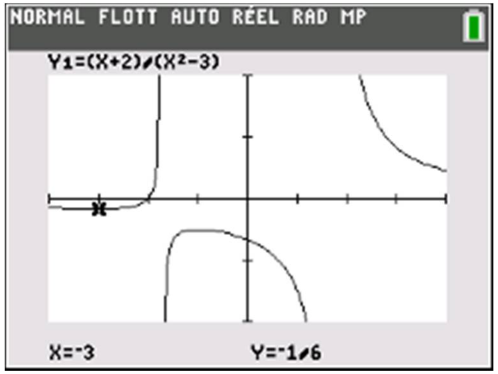
On obtient le tableau de variation :

Attention à ne pas oublier les valeurs interdites !

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
Sens de variation de f		↘	$-\frac{1}{6}$	↗	‖	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	‖	↘	

$$f(-3) = \frac{(-3)+2}{(-3)^2-3} = \frac{-3+2}{9-3} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

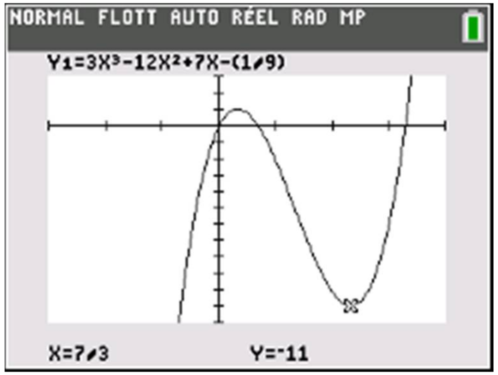
$$f(-1) = \frac{(-1)+2}{(-1)^2-3} = \frac{-1+2}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$



Exercice 3 [20 minutes]

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 7x - \frac{1}{9}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f.



Corrigé

1. La fonction f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 7x - \frac{1}{9}$

On obtient directement :

$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 12 \times 2x + 7$

$\boldsymbol{f'(x) = 9x^2 - 24x + 7}$

4. $9x^2 - 24x + 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 9$, $b = -24$ et $c = 7$, de discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(9)(7) = 576 - 252 = 324$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+24 - \sqrt{324}}{2(9)} = \frac{24 - 18}{18} = \frac{6}{18} = \frac{6 \times 1}{6 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+24 + \sqrt{324}}{2(9)} = \frac{24 + 18}{18} = \frac{42}{18} = \frac{6 \times 7}{6 \times 3} = \frac{7}{3}$$

<u>Règle</u> : $ax^2 + bx + c$ est signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre ses racines.

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	-11	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{9} = 1$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = 3\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{7}{3}\right) - \frac{1}{9} = -11$$

Exercice 4 [20 minutes]

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

<u>**Corrigé**</u>

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$

1. Intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, qui s'écrit aussi : $(x^2 - 4)^2 - 1 = 0$.

On a :

$(x^2 - 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4 + 1)(x^2 - 4 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - (\sqrt{3})^2\right)\left(x^2 - (\sqrt{5})^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$ ou $x - \sqrt{5} = 0$ ou $x + \sqrt{5} = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en quatre point d'abscisses respectives : $-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

2. $f'(x)$ et tableau de variation de f

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$

On developpe d'abord $f(x)$:

$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$

$f(x) = (x^2)^2 - 2(x^2)(4) + (4)^2 - 1$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 - 1$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$

On calcule ensuite $f'(x)$ à partir de la forme développée de $f(x)$:

$f'(x) = 4x^3 - 8 \times 2x$

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 4x(x^2 - 4)$

$f'(x) = 4x(x^2 - 2^2)$

$\boldsymbol{f'(x) = 4x(x+2)(x-2)}$

• $4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{4} \Leftrightarrow x = 0$

• $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

• $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

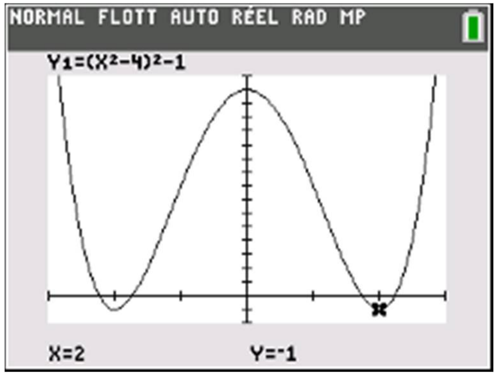
Règle : $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f		↘	-1	↗	15	↘	-1	↗	

$f(-2) = ((-2)^2 - 4)^2 - 1 = (4 - 4)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(0) = ((0)^2 - 4)^2 - 1 = (0 - 4)^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

$f(2) = ((2)^2 - 4)^2 - 1 = (4 - 4)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$



<u>Compléments</u>

• autre méthode de calcul de $f'(x)$

$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 1$

Rappel : $(u^2)' = 2u \times u'$

$u(x) = x^2 - 4 \qquad u'(x) = 2x$

$f'(x) = 2(x^2 - 4) \times 2x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$.

• On peut montrer que f est une **fonction paire**, donc sa représentation graphique dans un repère <u>orthogonal</u> admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, ce que l'on observe bien sur l'écran de la calculatrice.